

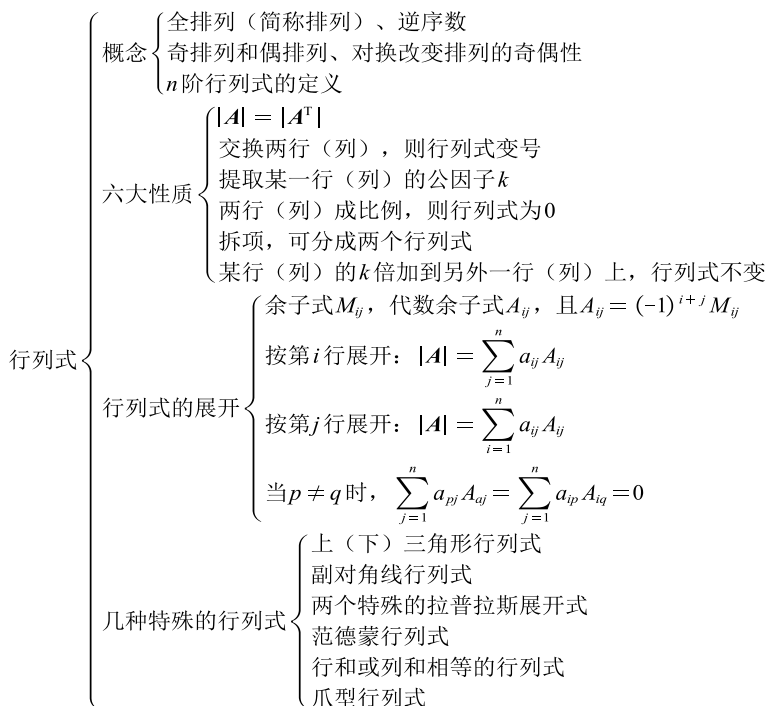
# 知识点 1~3

## 【总 览】

知识点 1~3 是围绕行列式展开的, 行列式是各大高校必考的知识点, 多数教材在第 1 章就介绍了行列式的概念及其计算, 少数教材在第 1 章先介绍矩阵, 在第 2 章才引入行列式. 本书延续大多数教材的编写顺序, 优先介绍行列式.

本部分一共涵盖 3 个知识点, 分别是行列式的概念及其性质、行列式的展开以及几种特殊的行列式. 通过本部分的学习, 可掌握常见的行列式计算的一般思路, 并能利用行列式的性质解决更为复杂的问题.

本部分 3 个知识点的框架如下:



## 知识点 1 行列式的概念及其性质

### 1. 排列和逆序

**排列:** 将  $1, 2, \dots, n$  这  $n$  个元素排成一列, 叫作这  $n$  个元素的全排列, 一般简称排列. 例如,  $1, 2, 3$  这 3 个元素共有 6 种排列, 分别是 123, 132, 213, 231, 312, 321.

**逆序:** 在  $n$  个元素的排列  $j_1, j_2, \dots, j_n$  中, 如果一个大数  $j_p$  排在一个小数  $j_q$  的前面, 则称这两个数构成一个逆序. 例如, 排列 123 不存在逆序, 因为没有大数排在小数的前面; 排列 132 有 1 个逆序, 即 3 和 2; 排列 321 有 3 个逆序, 即 3 和 2, 3 和 1 以及 2 和 1.

**逆序数:** 一个排列中逆序的数量称为这个排列的逆序数. 例如, 排列 123, 132, 321 的逆序数分别为 0, 1, 3. 一般用函数  $\tau(x)$  表示排列  $x$  的逆序数, 则  $\tau(123) = 0$ ,  $\tau(132) = 1$ ,  $\tau(321) = 3$ .

**奇排列和偶排列:** 排列的逆序数为奇数时, 称该排列为奇排列; 排列的逆序数为偶数时, 称该排列为偶排列.

例如, 排列 123, 132, 321 分别为偶排列、奇排列、奇排列.

**对换:** 在排列中, 将任意两个元素交换位置, 其他元素不变的操作叫作排列的一次对换.

**排列的一次对换一定会改变排列的奇偶性.** 例如, 将偶排列 123 中 1 和 2 交换位置变为 213, 此时  $\tau(213) = 1$ , 所以对换一次后, 排列变为奇排列. 如果再对 213 对换一次变为 231, 则此时  $\tau(231) = 2$ , 排列又变为偶排列.

$$n \text{ 阶行列式 } D = |A_{n \times n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{1, 2, \dots, n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (D \text{ 是行列式单词的首字母}).$$

里  $\sum_{1, 2, \dots, n}$  表示对  $n$  个元素的不同排列求和, 所以一共有  $n!$  项之和. 注意观察等式的右边, 行下标的排列为  $12 \cdots n$ ,

而列下标是  $n$  种排列中的某一种, 因此每个求和项都由取自不同行、不同列的  $n$  个元素的乘积组成, 每项前面的正负号取决于列下标排列的奇偶性, 若为奇排列, 则取负号, 若为偶排列, 则取正号.

例如, 二阶行列式和三阶行列式的求法:

$$D = |A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$D = |A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{\tau(231)} a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{\tau(312)} a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^{\tau(321)} a_{13} a_{22} a_{31} + (-1)^{\tau(132)} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{\tau(213)} a_{12} a_{21} a_{33} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}.$$

**技巧:** 行列式是一个数. 考试中, 二阶和三阶行列式的公式可以直接使用, 一种简便的记法为: 主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积. 用图可表示为:

$$|A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad |A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线      主对角线      副对角线      主对角线

注: 行列式大于三阶后不能用这种方法计算, 例如四阶行列式本来展开后有  $4!$  项, 但是主对角线和副对角线加起来只有 8 项.

**例 1** 五阶行列式  $D = |a_{ij}|$  的展开式中有一项  $a_{31} a_{23} a_{5i} a_{1j} a_{45}$  带负号, 则  $i, j$  分别为\_\_\_\_\_, 此行列式展开式中共有\_\_\_\_\_项.

**解**  $a_{31} a_{23} a_{5i} a_{1j} a_{45} = a_{1j} a_{23} a_{31} a_{45} a_{5i}$ , 其列下标排列为  $j315i$  (缺少 2 和 4), 当  $i=4, j=2$  时, 其逆序数为 3, 属于奇排列, 所以带负号. 由定义可知, 五阶行列式展开式项数为  $5! = 120$ .

**例 2** 设多项式  $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 2x & 2x \\ 2 & x & 1 & -1 \\ -3x & 2 & 3 & 1 \\ -2 & x & x & x^2 \end{vmatrix}$ , 则  $f(x)$  中  $x^5$  项的系数为\_\_\_\_\_.

**解** 行列式求和表达式中每一项均来自不同行、不同列, 含  $x^5$  的项只能取元素  $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ , 排列 3214 的逆

序数为 3, 所以含  $x^5$  的项为  $(-1)^3 \cdot 2x \cdot x \cdot (-3x) \cdot x^2 = 6x^5$ , 其系数为 6.

## 2. 行列式的六大性质

**预备知识:** 设  $n$  阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的转置  $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , 也可用  $n$  个  $n$  维列向

量表示矩阵  $A$ , 即  $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ . 另外, 可用符号  $r_i$  表示行列式 (或矩阵) 的第  $i$  行,  $c_j$  表示行列式 (或矩阵) 的第  $j$  列.

**性质 1:** 行列式和它的转置行列式相等, 即  $|A| = |A^T|$ .

由该性质可知, 行和列具有同等的地位, 因此  $n$  阶行列式还可以定义为:

$$|A_{n \times n}| = \sum_{1, 2, \cdots, n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

**性质 2:** 互换行列式的两列 (或两行), 行列式变号, 即  $|a_1 \cdots a_i \cdots a_j \cdots a_n| = -|a_1 \cdots a_j \cdots a_i \cdots a_n|$ .

推论: 如果一个行列式有两行或者两列完全相同, 那么这个行列式一定为 0. (将这两行或两列互换位置, 则  $D = -D$ , 所以  $D = 0$ )

**性质 3:** 行列式中某一列 (或某一行) 中所有元素都乘以同一个常数  $k$ , 等于用该常数  $k$  乘以这个行列式, 即  $|a_1 \cdots k a_i \cdots a_n| = k |a_1 \cdots a_i \cdots a_n|$ .

**性质 4:** 行列式中若有两列 (或两行) 对应元素成比例, 则这个行列式为 0, 即  $|a_1 \cdots k a_i \cdots a_i \cdots a_n| = 0$ .

证明: 利用性质 3, 先将这个比例系数  $k$  提到行列式外, 再根据性质 2 的推论可知, 该行列式等于  $k \times 0 = 0$ .

**性质 5:** 如果行列式  $D$  的某一列 (或某一行) 的元素都是两个数的和, 则  $D$  等于拆分后的两个行列式的和, 即  $|a_1 \cdots a_p + a_q \cdots a_n| = |a_1 \cdots a_p \cdots a_n| + |a_1 \cdots a_q \cdots a_n|$ .

例如,  $\begin{vmatrix} 1 & 1+2 \\ 2 & 2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 2 - 2 \times 1) + (1 \times 1 - 2 \times 2) = -3$ .

**性质 6:** 行列式的某一列 (或某一行) 的各元素乘以同一个数, 然后加到另一行 (列) 对应的元素上, 行列式不变.

用符号  $r_i \leftrightarrow r_j$  ( $c_i \leftrightarrow c_j$ ) 表示交换  $i, j$  两行 (列) 的位置, 符号  $r_i \div k$  ( $c_i \div k$ ) 表示第  $i$  行 (列) 提出公因子, 符号  $r_i \times k$  ( $c_i \times k$ ) 表示第  $i$  行 (列) 乘以公因子, 符号  $r_i + k r_j$  ( $c_i + k c_j$ ) 表示第  $j$  行 (列) 的元素乘以  $k$  后再加到第  $i$  行 (列) 上. 利用行列式的性质可简化行列式的计算, 在学完后续的内容后, 会有大量的题目在求解中需要用到这些性质, 因此这部分内容应引起足够的重视.

**陷阱:** 行列式的性质 3 容易和矩阵的性质混淆, 对于矩阵, 用常数  $k$  乘以这个矩阵等于这个矩

阵中每一个元素都乘以  $k$ . 例如:  $2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$  (行列式),  $2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$  (矩阵).

## 知识点 2 行列式的展开

### 1. 余子式

在  $n$  阶行列式中, 去掉元素  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行、第  $j$  列元素, 由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的  $n-1$  阶行列式称为元素  $a_{ij}$  的余子式, 记为  $M_{ij}$ , 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

### 2. 代数余子式

余子式  $M_{ij}$  乘以  $(-1)^{i+j}$  后所得的行列式称为  $a_{ij}$  的代数余子式, 记  $A_{ij}$ , 即  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , 显然也有  $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ .

### 3. 行列式按某一行(或某一列)展开

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和, 即

$$|A| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, n), \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (j=1, 2, \cdots, n), \end{cases}$$

但行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和, 结果为零, 即

$$\text{当 } p \neq q \text{ 时, } \sum_{j=1}^n a_{pj}A_{qj} = a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \cdots + a_{pn}A_{qn} = 0,$$

$$\text{当 } p = q \text{ 时, } \sum_{i=1}^n a_{ip}A_{iq} = a_{1p}A_{1q} + a_{2p}A_{2q} + \cdots + a_{np}A_{nq} = 0.$$

**例 1** 行列式  $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$  第 4 行元素的代数余子式之和  $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**解** 方法 1, 即计算 4 个代数余子式后再相加:

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = - \begin{vmatrix} b & b & b \\ a & b & b \\ b & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & b & b \\ b & a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

可以发现, 计算量非常大, 因此采用另外一种解法.

方法 2, 根据行列式的展开形式可知:

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i - br_4 (i=1, 2, 3)} \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

**例 2** 设四阶行列式  $D$  的第 1 行元素为  $a_{11}=2$ ,  $a_{12}=-1$ ,  $a_{13}=2$ ,  $a_{14}=0$ , 其余子式分别为  $M_{11}=3$ ,

$M_{12}=1$ ,  $M_{13}=1$ ,  $M_{14}=-2$ , 则  $D=$ \_\_\_\_\_.

**解**  $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}+a_{14}(-1)^{1+4}M_{14}$$

$$=2 \times 3 - (-1) \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 9.$$

### 知识点 3 几种特殊的行列式

#### 1. 上(下)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

#### 2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

#### 3. 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} A_{m \times m} & O \\ O & B_{n \times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|.$$

$$\begin{vmatrix} O & A_{n \times n} \\ B_{m \times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|.$$

#### 4. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

范德蒙行列式可用数学归纳法证明. 注意: 有时会考察这个行列式的转置形式.

#### 5. 行和或列和相等的行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n \times n} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

计算时将第 2 列起的每 1 列都加到第 1 列后提取公共项, 见下面例题.

## 6. 爪型行列式

$$\text{当 } a_i \neq 0 (i=1, 2, \dots, n) \text{ 时, } D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & & \\ c_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix} = \left( a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{a_i} \right) a_1 a_2 \cdots a_n (n \geq 1).$$

注: 该公式的推导可参见知识点 1~3 精选习题中的第 6 题.

**例 1** 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$ .

**解**  $n \geq 2$  时,

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{将每一列加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 3n+1 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3n+1 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3n+1 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3n+1 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (3n+1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 1 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{将每一列减第 1 行}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3n+1. \end{aligned}$$

$n=1$  时,  $D_1 = 4 = 3 \times 1 + 1$ , 因此  $D_n = 3n + 1$ .

## 【重要题型】

## 题型 1 利用性质化为上(下)三角形行列式计算

下面举例说明如何将任意一个行列式化为上三角形行列式. 例如, 计算  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 11 \end{vmatrix}$ .

首先观察该行列式, 希望其  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  和  $a_{32}$  上的元素为 0, 这样就得到了上三角形行列式. 因此, 第一步将第 1 列中的 2 和 3 消为 0, 只需要用第 2 行减去第 1 行的 2 倍, 第 3 行减去第 1 行的 3 倍即可, 于是可得到  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ .

下面希望将第 2 列中的 6 消掉, 因此可以用第 3 行减去第 2 行的 3 倍, 然后可得到  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ , 再套用上三角

形行列式的公式即可, 最终  $D = 4$ .

**例 1** 计算四阶行列式  $\begin{vmatrix} a & a & a & x \\ a & a & x & a \\ a & x & a & a \\ x & a & a & a \end{vmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } D & \xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} x+3a & x+3a & x+3a & x+3a \\ a & a & x & a \\ a & x & a & a \\ x & a & a & a \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_1 \div (x+3a)} (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & x & a \\ a & x & a & a \\ x & a & a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-ar_1, r_3-ar_1, r_4-ar_1} (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ x-a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 & = (x+3a)(-1)^{\frac{4 \times (4-1)}{2}} (x-a)^3 = (x+3a)(x-a)^3.
 \end{aligned}$$

$$\text{例 2 行列式 } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 1 & 2 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 1 & 2 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} & \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 0 & -1 & b & -2 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{r_3+\frac{1}{a}r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & b & -2+\frac{2}{a} \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc, \quad a \neq 0, \\ \\ = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & b & -2 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2, r_4 \text{ 成比例}} 0, \quad a = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

综上，将两种情况合成一种情况，可得原行列式 $=abc$ .

## 题型 2 加边法和爪型行列式

在考试中有一类很重要的题型，需要使用加边法解决. 所谓加边法，是指将一个  $n$  阶行列式加边后变为一个相等的  $n+1$  阶行列式，然后利用这新增加的一行或者一列消去其他行或者列的共同元素，最终得到一个爪型行列式，在计算时代入爪型行列式的计算公式即可.

这类题型一般会告知我们某个元素或者某些元素不为 0，而且这些元素一般位于主对角线上，这是为了保证利用爪型行列式的计算公式进行计算时分母不为 0，因此在考试中只要见到这样的信息，一定要想到先加边后化简计算. 下面举 3 个例子说明，且 3 个例子的难度逐渐加大.

### 例 3 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, \quad i=1, 2, \cdots, n).$$

$$\text{解 利用加边法得 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \quad \text{将第 } i+1 \text{ 行减去第 1 行 } (i=1, 2, \cdots, n) \text{ 可得}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{爪型行列式}} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^n a_i.$$

注：只要利用了加边法求行列式，就不用单独讨论  $n=1$  的情形。

**例 4** 计算  $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n).$

**解** 利用加边法得  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$ ，将第  $i+1$  列减去第 1 列 ( $i=1, 2, \cdots, n$ ) 可得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

**例 5** 计算  $n$  阶行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a-a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & a-a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & a-a_n^2 \end{vmatrix} \quad (a \neq 0).$

**解** 利用加边法得  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a-a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ 0 & -a_2 a_1 & a-a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & a-a_n^2 \end{vmatrix}$ ，将第 1 行的  $a_i$  倍加到第  $i+1$  行 ( $i=1, 2, \cdots, n$ )

可得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a^n \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a}\right).$$

### 题型 3 三对角行列式

所谓三对角行列式，是指在主对角线和与主对角线相邻的两条对角线上有不为 0 的常数（且一般每条线上的常数均相等），其他位置全为 0 的一类行列式，这类行列式满足如下递推关系式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 1 & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} - bcD_{n-2} \quad (n > 2).$$

在得到这个递推关系式后，可以利用高中学到的数列的知识找出通解形式，下面举例说明如何求出通解。



**例 6** 计算  $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$ .

**解**  $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} (n > 2)$ , 且  $D_1 = a+b$ ,  $D_2 = a^2 + b^2 + ab$ .

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n.$$

同理可得  $D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1) = a^n$ . 因此,

$$\begin{cases} D_n - aD_{n-1} = b^n, \\ D_n - bD_{n-1} = a^n. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bD_n - abD_{n-1} = b^{n+1}, \\ aD_n - abD_{n-1} = a^{n+1}. \end{cases}$$

由此可得  $(b-a)D_n = b^{n+1} - a^{n+1}$ . 当  $a \neq b$  时,  $D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} (n > 2)$ .

当  $a = b$  时,  $D_n = aD_{n-1} + a^n = a(aD_{n-2} + a^{n-1}) + a^n$

$$= a^2 D_{n-2} + 2a^n = \cdots = a^{n-1} D_1 + (n-1)a^n = (n+1)a^n (n > 2).$$

接下来验证  $n=1$  和  $n=2$  是否满足通项.

因为  $D_1 = a+b$ ,  $D_2 = a^2 + b^2 + ab$ , 则两者均满足通项, 故  $D_n = \begin{cases} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}, & a \neq b, \\ (n+1)a^n, & a = b. \end{cases}$

## 【精选习题】

### 基础篇

1. 若  $n$  阶行列式  $D$  的值等于  $d$ , 则将  $D$  的所有元素改变符号后得到的行列式的值为\_\_\_\_\_.
2. 在五阶行列式中, 项  $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43}$  的系数是\_\_\_\_\_.

3. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}$ .

4. 计算行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ .

5. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix}$ .

6. 计算行列式 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

7. 计算  $n$  阶行列式 
$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 2+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & n+x_n \end{vmatrix}.$$

8. 计算  $n$  阶行列式  $D = \begin{vmatrix} a_1+\lambda & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+\lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n+\lambda \end{vmatrix}.$

9. 计算  $n$  阶行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

10. 已知  $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ , 求其代数余子式之和  $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ .

### 提高篇

11. 计算行列式  $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$

12. 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为非零矩阵, 若行列式  $|A|$  中每个元素与其代数余子式相等, 证明  $|A| \neq 0$ .

13. 求行列式  $D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$  (其中未写出的元素都是 0).

14. 设行列式  $D = |a_{ij}|_n = \begin{vmatrix} 1+x & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2+x & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1+x & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x \end{vmatrix}$ , 其中  $x \neq 0$ ,  $A_{ij}$  为  $D$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式,

求  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$ .

15. 证明: 若行列式的某行元素全为  $k (k \neq 0)$ , 则这个行列式的全部代数余子式之和为该行列式值的  $\frac{1}{k}$ , 即

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = \frac{1}{k} |A|.$$